

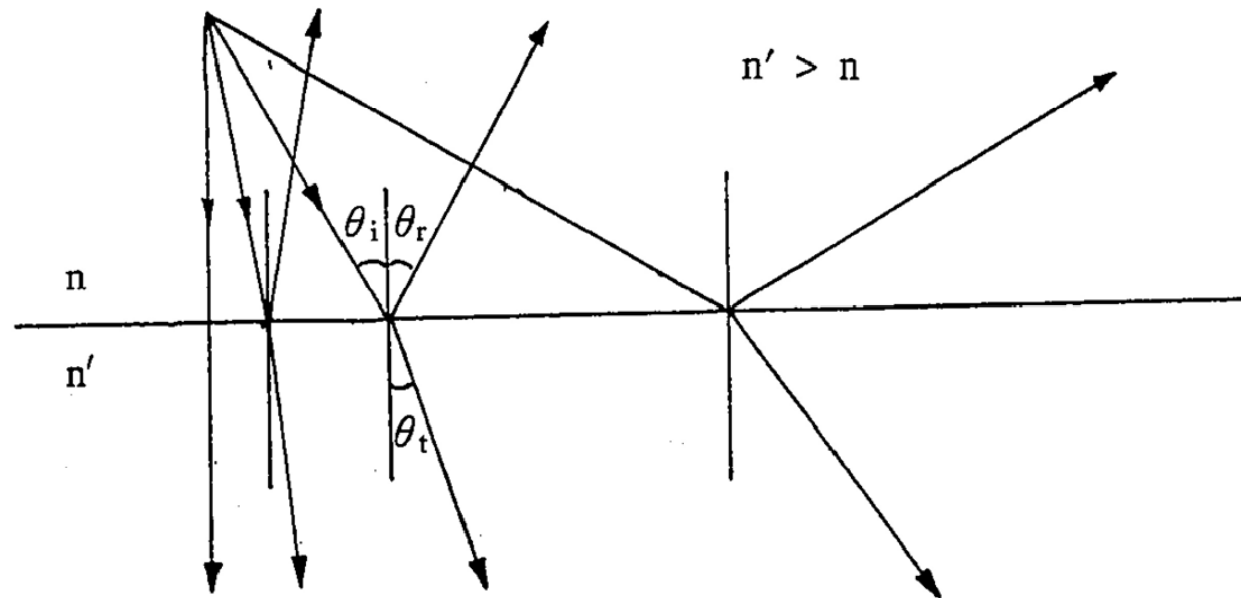
# Ch3 光學平面性質

# Outline

- 臨界角和全反射
- 全反射的應用
- 稜鏡的偏向
- 稜鏡的色散
- 楔
- 圖解法(self study)
- 光束經平面的成像

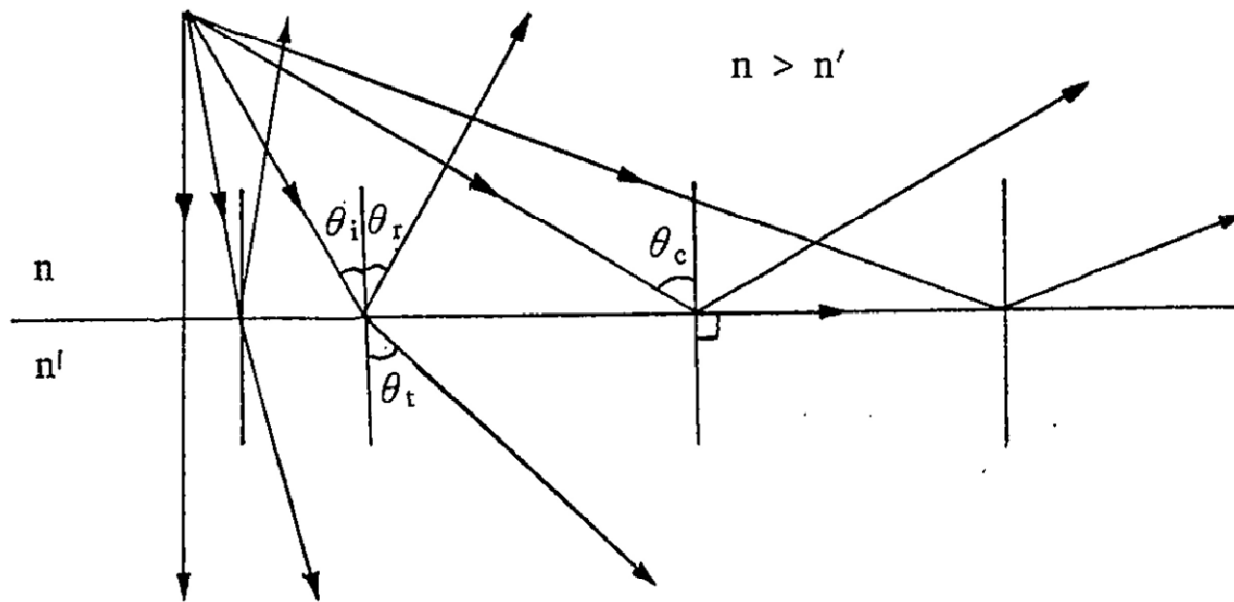
## 臨界角和全反射

- 外反射: 當一光線由光疏介質射入光密介質，反射角隨著入射角的增加而增加，折射角都比入射角小，這種狀況稱之為外反射 (**external reflection**)。



【圖 3-1】

- 內反射: 當一光線由光密介質射入光疏介質，反射角隨著入射角的增加而增加，折射角都比入射角大，這種狀況稱之為內反射 (**internal reflection**)。



【圖 3-2】

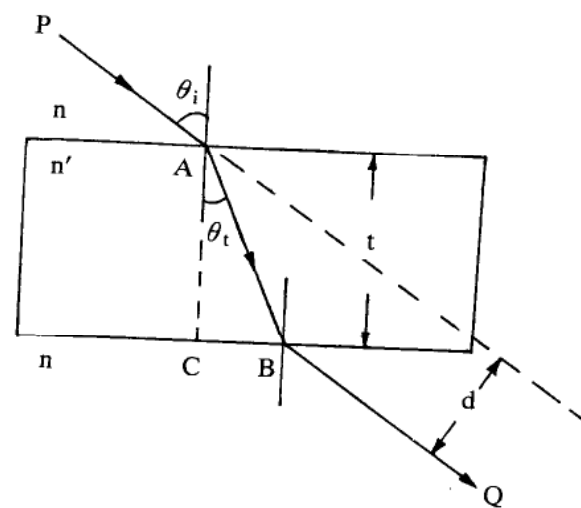
【例 1】光線  $\overline{PA}$  以入射角  $\theta_i$  由  $n$  介質入射到一折射率為  $n'$  的平行玻璃表面，（見圖 3-3）， $t$  為玻璃平板的厚度， $\overline{BQ}$  為最後的射出光線，試證：

- (a) 不論  $t$  與  $n$  值為何， $\overline{BQ}$  線會平行  $\overline{PA}$ 。
- (b) 最後射出光線  $\overline{BQ}$  與入射光射  $\overline{PA}$  會有一平行位移量  $d$ ，

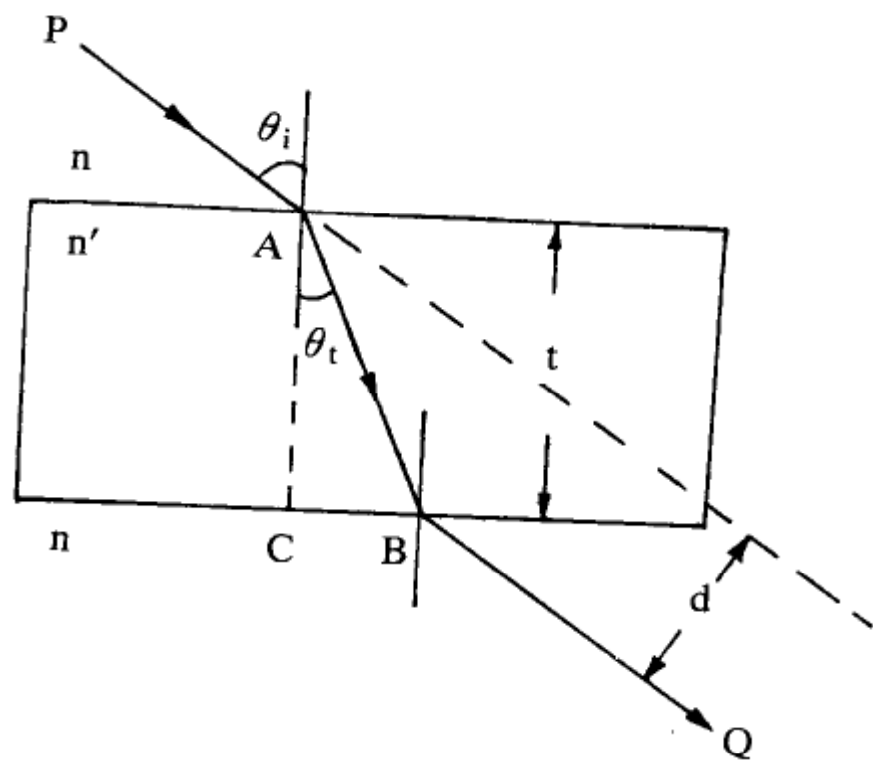
$$d = t \sin \theta_i \left( 1 - \frac{n \cos \theta_i}{n' \cos \theta_t} \right)$$

- (c) 當  $\theta_i$  很小時，上式可改寫為

$$d = t \theta_i \left( 1 - \frac{n}{n'} \right)$$



【圖 3-3】



【圖 3-3】

解：

- (a)  $\overline{PA}$  入射光以  $\theta_i$  角度入射全玻璃表面，則由 Snell 定理可知折射角  $\theta_t$  滿足

$$n \sin \theta_i = n' \sin \theta_t$$

然而此折射光  $\overline{AB}$  由玻璃射出時，由於兩個面平行，故第二界面的入射角為  $\theta_t$  而折射角必為  $\theta_i$ ，所以經過平行玻璃平板後的光線必與入射光線平行。

- (b) 令  $\overline{AB}$  長為  $l$ ，則位移量  $d$  為：

$$\begin{aligned} d &= l \sin(\theta_i - \theta_t) \\ &= l (\sin \theta_i \cos \theta_t - \sin \theta_t \cos \theta_i) \end{aligned}$$

在  $\triangle ABC$  中可知

$$l = t / \cos \theta_t$$

故

$$d = t \left( \frac{\sin \theta_i \cos \theta_t}{\cos \theta_t} - \frac{\sin \theta_t \cos \theta_i}{\cos \theta_t} \right)$$

由 Snell 定理知

$$n \sin \theta_i = n' \sin \theta_t$$

綜合可得

$$d = t \sin \theta_i \left(1 - \frac{n}{n'} \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_t}\right) \quad (3.1)$$

(c) 當  $\theta_i$  很小時，則

$$\sin \theta_i \approx \theta_i, \quad \cos \theta_i \approx \cos \theta_t \approx 1$$

故

$$d = t \theta_i \left(1 - \frac{n}{n'}\right) \quad (3.2)$$

由此例可知，光線經平行玻璃平板後，光線並不會偏向，



只會有一平行位移 (d) 產生，而此位移量與入射角度 ( $\theta_i$ ) 和玻璃板厚度 (t) 有關。在入射光是小角度入射時，它們的關係可簡單的寫成爲一次方正比。

在內反射中，有一個很有趣的現象，值得我們注意，當入射角  $\theta_i = \theta_c$  時，折射角爲  $90^\circ$ ，而當  $\theta_i \geq \theta_c$  時，就不再具有折射光，全部的光線都被反射回原來的介質中，這個現象稱之爲全反射 (total reflection)，而  $\theta_c$  則稱爲臨界角 (critical angle)。在任何內反射系統中，臨界角的大小，取決於界面兩邊的折射率，其值可由臨界角的定義計算而得，

$$n \sin \theta_c = n' \sin 90^\circ$$

故

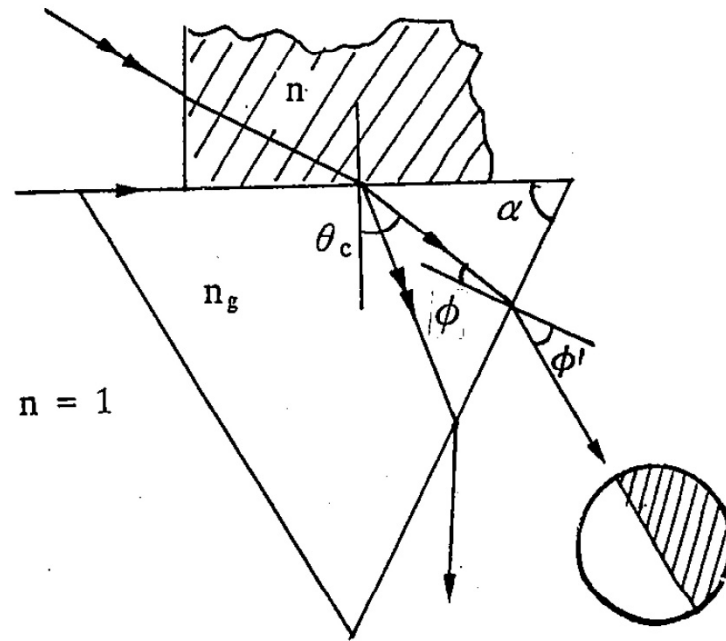
$$\theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{n'}{n}\right) \tag{3.3}$$

# 全反射的應用

全反射現象對於光學系統的影響往往是不能忽視的，譬如兩光學面的貼合，常會因光學面間極薄的空氣層，而使光線發生全反射現象，造成能量無法傳播，所以我們必須用和光學元件相同折射率的光學油 (Canadian Balsam) 來代替空氣層，以避免全反射現象的發生。這種狀況同時也可能發生在膠合系統上，所以對膠合材料的選擇，不能不多加注意。

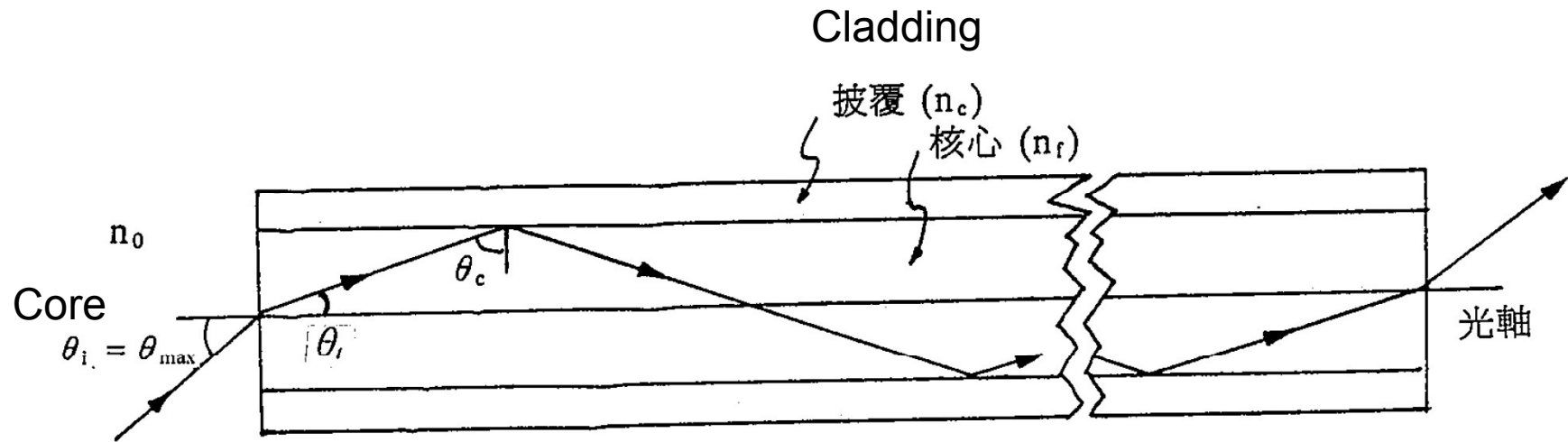
全反射現象對於光學系統也有很多正面的影響，以下我們用一些例子來加以說明。

# 折光器 (refract meter) (self-study)



【圖 3-4】

# 光纖 (Fiber)



【圖 3-5】

1.  $\theta < \theta_{max}$

2.  $2\theta_{max}$  : 光纖可接受光在其內傳播的光錐角度

3. NA (numerical aperture):  $(NA)^2$ 代表光學系統的聚光能力

$$n_f \sin \theta_c = n_c \sin 90^\circ$$

$$\sin \theta_c = \frac{n_c}{n_f} = \sin(90^\circ - \theta_t)$$

所以

$$\cos \theta_t = \frac{n_c}{n_f} = (1 - \sin^2 \theta_t)^{1/2}$$

$$\sin \theta_{max} = \frac{1}{n_0} (n_f^2 - n_c^2)^{1/2} \quad (3.4)$$

NA 值的定義為

$$\begin{aligned} NA &\equiv n_0 \sin \theta_{max} \\ &= (n_f^2 - n_c^2)^{1/2} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\hspace{10em} (3.5)}$$

由於正弦函數值不可能大過 1，故在空氣中 ( $n_0 = 1$ )，光纖的 NA 值最大即為 1，這表示  $\theta_{max} = 90^\circ$ ，亦即所有角度的入射光線導入光纖後，都能發生全反射現象，而能被傳導前進。一般可接受的光纖 NA 值約在 0.2 ~ 1 之間。

$n_f$ ;  $n_c$  若  
已知  $\rightarrow$

$\theta_{max}$

**【例 3】** 將一單模 (single mode) 光纖置於空氣中，若光纖核心折射率為 1.62，披覆部份折射率為 1.52，求此光纖的 NA 值。

**解：**

由 (3.4) 式可知

$$\begin{aligned}\sin \theta_{max} &= \frac{1}{n_0} (n_f^2 - n_c^2)^{1/2} \\ &= [(1.62)^2 - (1.52)^2]^{1/2} \\ &= 0.56 \\ \theta_{max} &= 34^\circ\end{aligned}$$

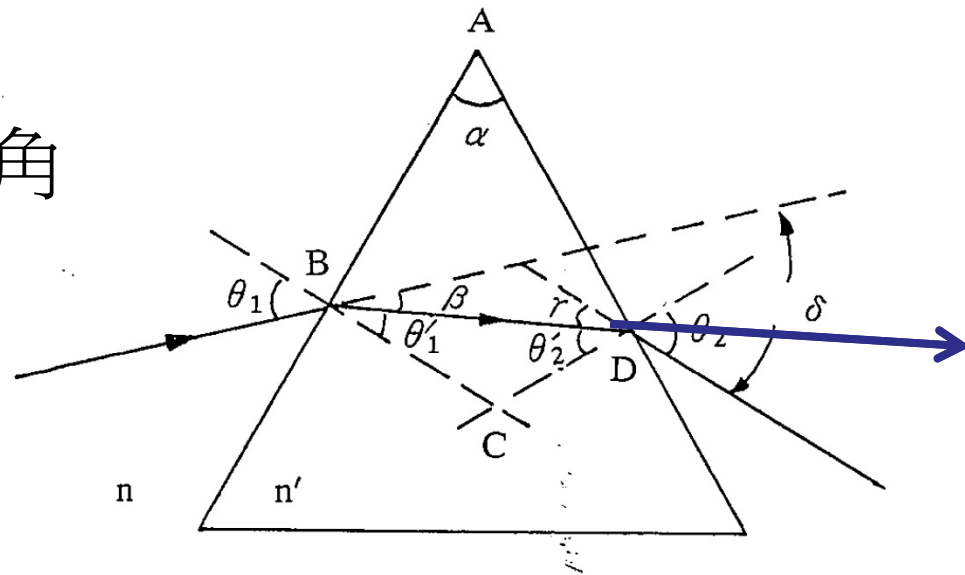
此單模光纖可接受光的光錐角度為  $68^\circ$ ，光纖的 NA 值為 0.56。

### 3-3 稜鏡的偏向

基本特性: 1.使光偏向 2.產生色散

$\alpha$ (*apex angle*): 稜鏡角

$\delta$ (*deviation angle*): 偏向角



【圖 3-13】

$$\beta = \theta_1 - \theta'_1$$

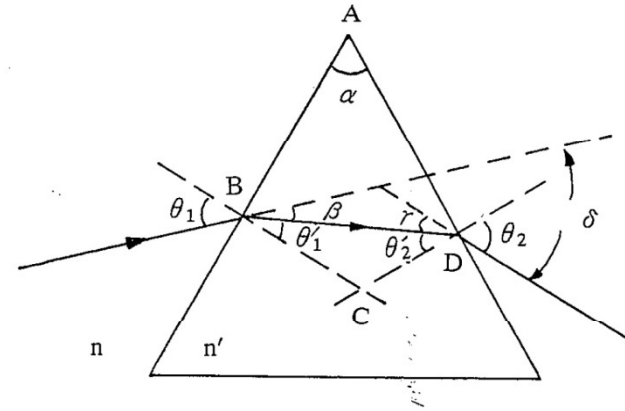
$$\gamma = \theta_2 - \theta'_2$$

而

$$\delta = \beta + \gamma$$

$$= (\theta_1 - \theta'_1) + (\theta_2 - \theta'_2)$$

$$= (\theta_1 + \theta_2) - (\theta'_1 + \theta'_2)$$



【圖 3-13】

再由四邊形 ABCD 的幾何關係知

$$\alpha = \theta'_1 + \theta'_2$$

(3.7)

代入 (3.6) 式可知

$$\alpha + \angle BCD = 180^\circ \rightarrow \alpha = 180^\circ - \angle BCD$$

$$\angle BCD + \theta'_1 + \theta'_2 = 180^\circ \rightarrow \theta'_1 + \theta'_2 = 180^\circ - \angle BCD$$

$$\delta = \theta_1 + \theta_2 - \alpha \quad \text{偏向角} = \text{出入射角} + \text{終折射角} - \text{稜鏡角} \quad (3.8)$$

在 (3.8) 式中， $\theta_2$  是一個入射角  $\theta_1$  的函數，故偏向角  $\delta$  即為一個  $\theta_1$  與  $\alpha$  的函數。舉個例子來說，若以一單色光入射一已知稜鏡 ( $n'$ ,  $\alpha$  固定) 那麼偏向角就只單純是入射角的函數， $\delta$  對  $\theta_1$  的函數曲線如圖 3-14 所示。



偏向角

$$\delta = \delta(\theta_1, \theta_2, \alpha)$$

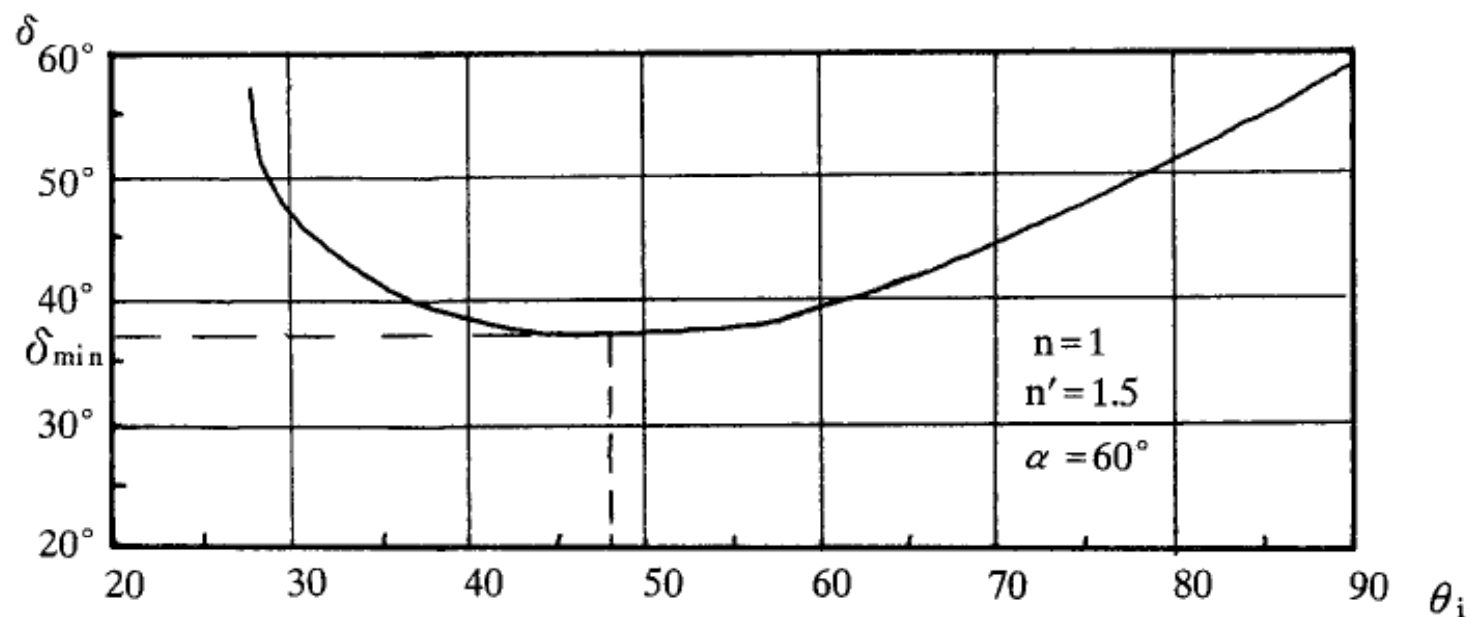
$$\because \theta_2 = \theta(\theta_1)$$

$\therefore \theta_2$  can be replaced by  $\theta_1$

$$\rightarrow \delta = \delta(\theta_1, \alpha)$$

$\alpha = \text{const} \tan t$  固定稜鏡角

$$\therefore \delta = \delta(\theta_1)$$



【圖 3-14】


圖 3-14 很明顯的可以看出，對某一稜鏡而言，系統有最小的偏向角 ( $\delta_{\min}$ )，至於最小偏向角和入射角間的關係，可由下面的計算得知，發生最小偏向角的入射角應滿足

$$\frac{d\delta}{d\theta_1} = 0$$

由式 (3.8) 可知

$$\delta = \theta_1 + \theta_2 - \alpha$$
$$\frac{d\delta}{d\theta_1} = 1 + \frac{d\theta_2}{d\theta_1} = 0$$

可得


$$d\theta_2 = -d\theta_1$$

(3.9)

此外，對某個稜鏡而言， $\alpha$  是個常數值，因此對 (3.7) 式微分

$$\alpha = \theta_1 + \theta_2$$

$$d\theta'_1 = -d\theta'_2 \quad (3.10)$$

在兩界面上應用 Snell 定律

$$n \sin \theta_1 = n' \sin \theta'_1 \quad \text{第一界面} \quad (3.11)$$

$$n' \sin \theta'_2 = n \sin \theta_2 \quad \text{第二界面} \quad (3.12)$$

再對上兩式左右兩邊作全微分可得

$$n \cos \theta_1 d\theta_1 = n' \cos \theta'_1 d\theta'_1 \quad (3.13)$$

$$n \cos \theta_2 d\theta_2 = n' \cos \theta'_2 d\theta'_2 \quad (3.14)$$

上兩式相除，並將 (3.9) 式及 (3.10) 式代入，得

$$\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} = \frac{\cos \theta'_1}{\cos \theta'_2} \quad (3.15)$$

再利用 Snell 定律，可將 (3.15) 式改爲

$$\frac{1 - \sin^2 \theta_1}{1 - \sin^2 \theta_2} = \frac{(n')^2 - n^2 \sin^2 \theta_1}{(n')^2 - n^2 \sin^2 \theta_2} \quad (3.16)$$

在 (3.16) 式中，因爲  $n' \neq n$ ，所以上式成立的必要條件爲

$$\theta_1 = \theta_2 \quad (3.17)$$

$$\longrightarrow \theta'_1 = \theta'_2 \quad \gamma = \beta \quad (3.18)$$

也就是說在 (3.17) 式和 (3.18) 式的條件下，稜鏡會有最小的偏向角，若對一個  $60^\circ - 60^\circ - 60^\circ$  稜鏡而言，此狀況恰為光線  $\overline{BD}$  平行稜鏡底邊（見圖 3-13）時的偏向角。(3.7) 式和 (3.8) 式在最小偏向角時可修正為

$$\delta_{min} = 2\theta_1 - \alpha \quad (3.19)$$

$$\alpha = 2\theta'_1$$

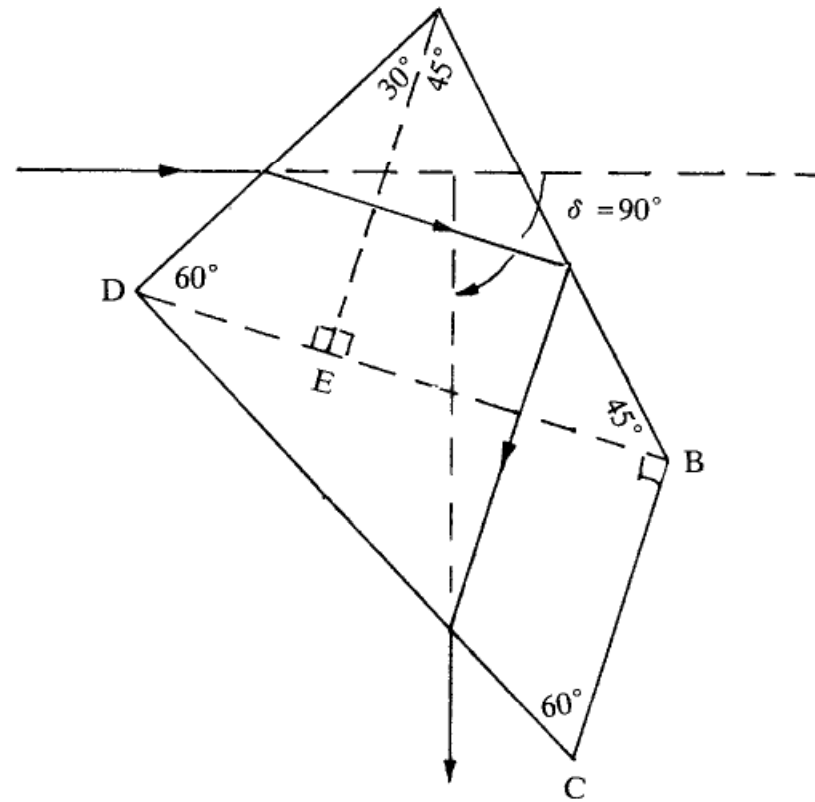
稜鏡第一界面上的 Snell 定律亦可寫成

$$\frac{n'}{n} = \frac{\sin[(\delta_{min} + \alpha)/2]}{\sin(\alpha/2)}$$

$$\begin{aligned} n \sin \theta_1 &= n' \sin \theta'_1 \\ \therefore \frac{n'}{n} &= \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta'_1} \end{aligned} \quad (3.20)$$

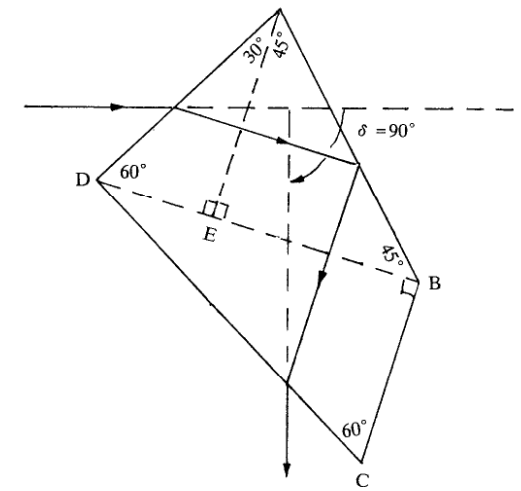
若將稜鏡擺在空氣中 ( $n=1$ )，那麼 (3.20) 式可說是決定透明介質折射率的精確方法之一。

光束若取最小偏向角發生的入射角入射稜鏡，則當可保持光束的光錐角度，使像差減至最低。下面我們介紹一種可維持固定偏向角的稜鏡(constant deviation dispersing prism)



【圖 3-15】

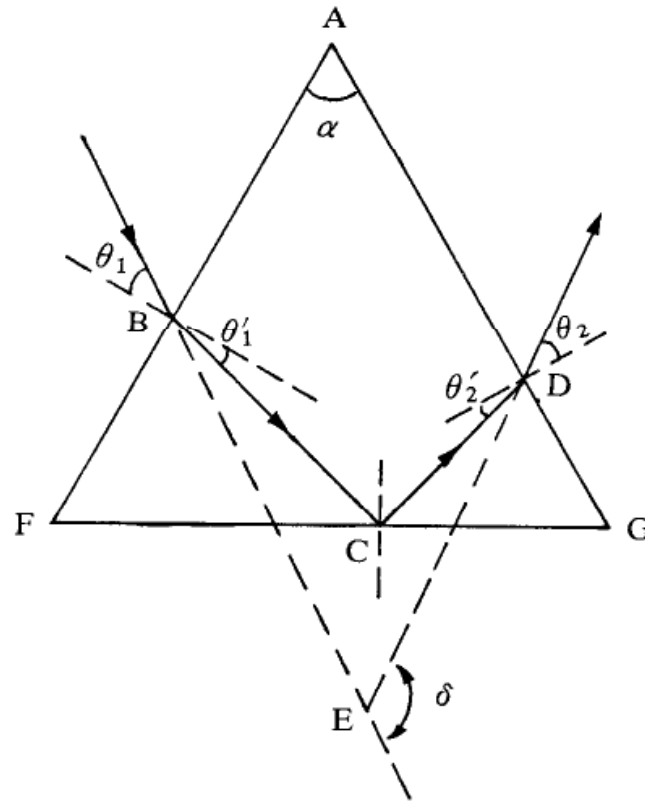
圖 3-15 顯示的是一個 Pellin - Broca 稜鏡，這個稜鏡可以看成是由二個  $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$  的稜鏡 (ADE, DCB) 和一個  $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$  的稜鏡 (ABE) 所組合而成。當某一單色光由 AD 面射入系統，若此光線在 AB 面以  $45^\circ$  的反射角反射，再經 CD 面折射而出，則會使光線的偏向角達到  $90^\circ$ ，這可以將之視為光線以產生最小偏向角的方式通過一個  $60^\circ - 60^\circ - 60^\circ$  的稜鏡 (由 ADE 及 BCD 組成)，亦即在稜鏡內的光線必平行於  $\overline{BD}$  和  $\overline{BC}$  二邊。當以複色光入射此 Pellin - Broca 稜鏡時，若某一  $\lambda_1$  波長之光線滿足  $\delta = 90^\circ$  的偏向，那麼其它波長光線的偏向角就不可能也是  $90^\circ$ 。但若我們以垂直紙面的方向為軸，緩緩轉動 Pellin - Broca 稜鏡，則必有另一波長  $\lambda_2$  的光線滿足偏向角是  $90^\circ$  的條件，所以若將此稜鏡放置在如光譜儀的儀器內，在和入射光維持固定角度 ( $90^\circ$ ) 的觀測方向上，只藉著轉動稜鏡，我們就可個別的觀測到不同波長的光線了。



【圖 3-15】



本節一開始談到的偏向角，是因光在兩個界面上折射所造成的，現在讓我們再看另一種方式所造成的偏向——反射式稜鏡的偏向角。



【圖 3-16】

在圖 3-16 中，光線打在 FG 面的 C 點上，此時若入射角大過臨界角，就會發生全反射現象，光線再經 AG 面的 D 點折射而出。若入射角小於臨界角，就無法全反射，為避免因入射角太小而會有無法全反射的麻煩，我們也可藉著將 FG 面鍍銀以達到反射的效果，其中偏向角為

$$\delta = 180^\circ - \angle BED$$

由四邊形 ABED 可知

$$\alpha + \angle ABE + \angle BED + \angle EDA = 360^\circ$$

$$90^\circ + \theta_1 \quad 180^\circ - \delta \quad 90^\circ + \theta_2$$

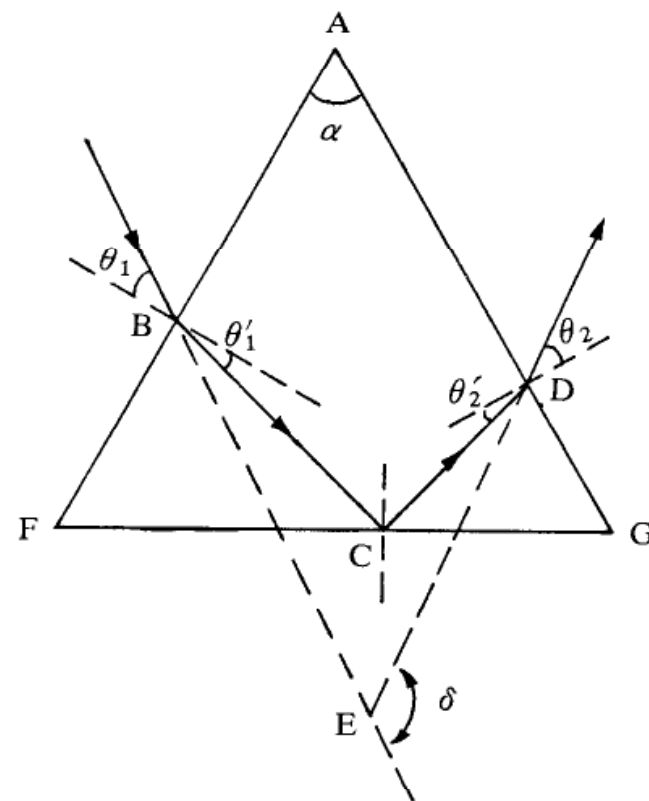
在兩個折射面上

$$\angle ABE = 90^\circ + \theta_1$$

$$\angle EDA = 90^\circ + \theta_2$$

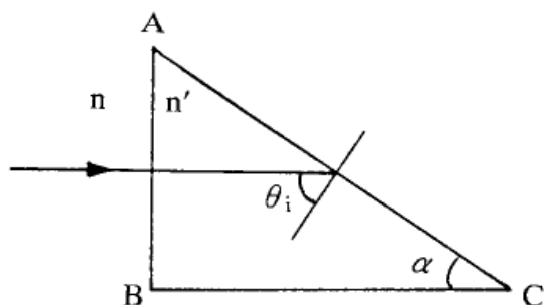
故

$$\delta = \theta_1 + \theta_2 + \alpha$$



【圖 3-16】

【例 4】 折射率為 1.64 的直角稜鏡，放置於水中 ( $n_{\text{水}} = 1.33$ )，若光線由  $\overline{AB}$  面垂直入射，試求  $\alpha$  的角度應為何始可令光線在  $\overline{AC}$  面發生全反射現象。



【圖 3-17】

$$\theta_i \geq \theta_c$$

由圖知

$$\alpha = 90^\circ - \theta_i$$

故

$$\alpha \leq 90^\circ - \theta_c = 35.81^\circ$$

解： 依題意  $n$  為水的折射率  $n = 1.33$

$n'$  為稜鏡折射率  $n' = 1.64$

而全反射的臨界角滿足

$$\theta_c = \sin^{-1} \frac{1.33}{1.64} \approx 54.19^\circ$$

若發生全反射，則入射角  $\theta_i$  應滿足

即  $\alpha$  的角度最大值為  $35.81^\circ$

## 3-4 稜鏡的色散

$$\delta = \theta_1 + \theta_2 - \alpha$$

(3.8) 式中，我們得到偏向角 ( $\delta$ )、入射角 ( $\theta_1$ )、折射角 ( $\theta_2$ ) 以及稜鏡角 ( $\alpha$ ) 間的關係，利用 Snell 定律，我們可將其中的折射角  $\theta_2$  用入射角  $\theta_1$  表示出來，(參考圖 3-13)

$$n \sin \theta_2 = n' \sin \theta'_2$$

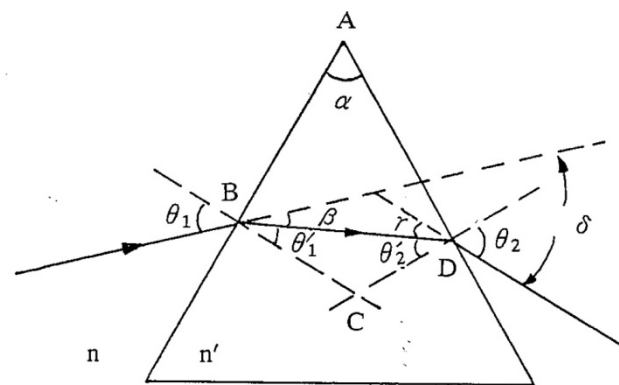
$$\begin{aligned} \theta_2 &= \sin^{-1}\left(\frac{n'}{n} \sin \theta'_2\right) \\ &= \sin^{-1}\left[\frac{n'}{n} \sin(\alpha - \theta'_1)\right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

再利用 Snell 定律

$$n \sin \theta_1 = n' \sin \theta'_1$$

$$\cos \theta'_1 = \left(1 - \frac{n^2}{n'^2} \sin^2 \theta_1\right)^{1/2}$$

代入 (3.22) 式中，可得



【圖 3-13】

第二界面:折射角  $\theta_2 = \sin^{-1}[\sin \alpha(\frac{n'^2}{n^2} - \sin^2 \theta_1)^{1/2} - \cos \alpha \sin \theta_1]$  (3.23)

將 (3.23) 式代入 (3.8) 式，可得偏向角為

偏向角  $\delta = \theta_1 + \sin^{-1}[\sin \alpha(\frac{n'^2}{n^2} - \sin^2 \theta_1)^{1/2} - \cos \alpha \sin \theta_1] - \alpha$  (3.24)  
 Where  $\theta_1$  is variable

(3.24) 式除了表示出偏向角是入射角  $\theta_1$  和稜鏡角  $\alpha$  的函數外

$$\delta = (\theta_1, \alpha, n', n)$$

$\because n' = n'(\lambda) \therefore n'$  變數可以被  $\lambda$  取代

$$\rightarrow \delta = (\theta_1, \alpha, \lambda, n)$$

，還顯出它也是折射率的函數。因為折射率是光波波長的函數  $n(\lambda)$ ，所以稜鏡也會因入射光波不同而有不同的偏向產生，亦即  $\delta = \delta(\lambda)$ ，這種現象，就叫做稜鏡的色散 (dispersion)。若用  $D$  表示稜鏡的角色散，則  $D$  的定義可寫成

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} \quad \text{在波長微小變化下，偏向角的變化} \quad (3.25)$$

在折射率  $n$ 、入射角  $\theta_1$ 、和稜鏡角  $\alpha$  是常數的條件下，利用 (3.8) 式，可將上式改爲

$$D = \frac{d\theta_2}{d\lambda} = \frac{d\theta_2}{dn'} \frac{dn'}{d\lambda} \quad (3.26)$$

對 (3.11) , (3.12) 式微分可得

$$n' \cos \theta'_1 d\theta'_1 + \sin \theta'_1 dn' = 0 \quad (3.27)$$

$$n' \cos \theta'_2 d\theta'_2 + \sin \theta'_2 dn' = n \cos \theta_2 d\theta_2 \quad (3.28)$$

將 (3.10) 式代入 (3.27) 式，可得

$$d\theta'_2 = \frac{\sin \theta'_1 dn'}{n' \cos \theta'_1} \quad (3.29)$$

再將上式代入 (3.28) 式，可得

$$\frac{d\theta_2}{dn'} = \frac{\sin \alpha}{n \cos \theta'_1 \cos \theta_2} \quad (3.30)$$

此外，我們利用第二章提及的 Couchy 所建立折射率  $n$  與入射光波長  $\lambda$  的關係

$$n = n_0 + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots \quad n = n(\lambda) \quad \text{只取前兩項}$$

可得稜鏡的折射率  $n'$  隨光波波長的變化量為

$$\frac{dn'}{d\lambda} \simeq -\frac{2B}{\lambda^3} \quad (3.31)$$

將 (3.30) 式，(3.31) 式代入 (3.26) 式，可得

$$D = -\frac{2B}{\lambda^3} \frac{\sin \alpha}{n \cos \theta_2 \cos \theta_1} \quad (3.32)$$

由此可知，稜鏡的角色散  $D$ ，取決於四個因素：製成稜鏡的物質、稜鏡角、入射光的波長和入射光線的方向。



若光線是以產生最小偏向角的方向上入射，那麼我們又可將(3.32)式簡化許多。

參看圖 3-18，設入射光束的寬度為  $a$ ，則  $a$  為

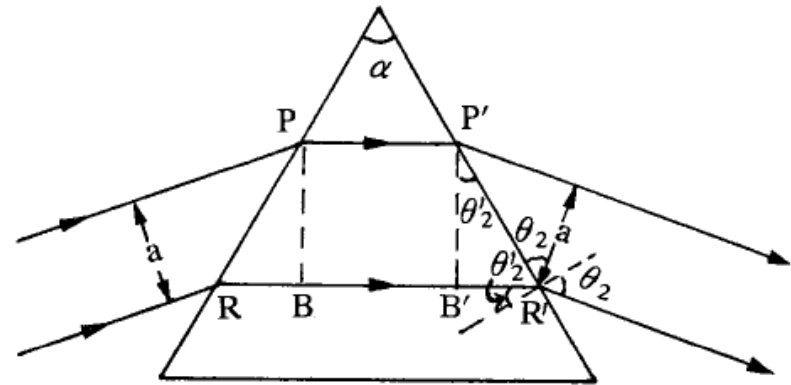
$$a = \overline{P'R'} \cos \theta_2$$

因為

$$\overline{R'B'} = \overline{P'R'} \sin \theta_2' = \overline{P'R'} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

所以

$$\overline{P'R'} = \frac{(\overline{RR'} - \overline{PP'})}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$



【圖 3-18】

其中  $\overline{RR'} - \overline{PP'}$  定義為稜鏡的有效厚度 (effective thickness)，用符號  $t$  來表示，因此可得入射光束寬度為

$$a = \frac{t \cos \theta_2}{2 \sin(\frac{\alpha}{2})} \quad (3.33)$$

將上式代入 (3.32) 式中，可得稜鏡角色散為

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = D = -\frac{2Bt}{na\lambda^3} \quad (3.34)$$

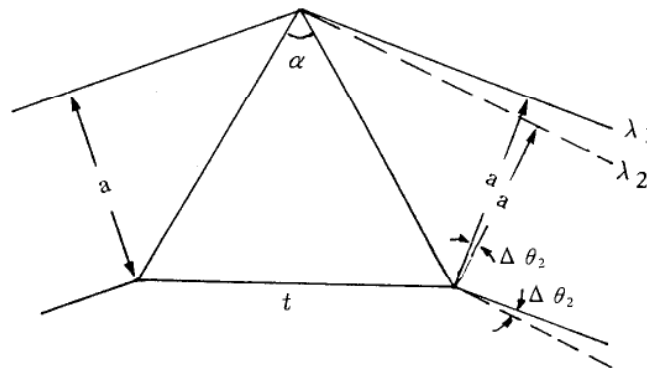
一般只考慮  $D$  的絕對值大小，故

$$D = \frac{2Bt}{na\lambda^3} \quad (3.34')$$

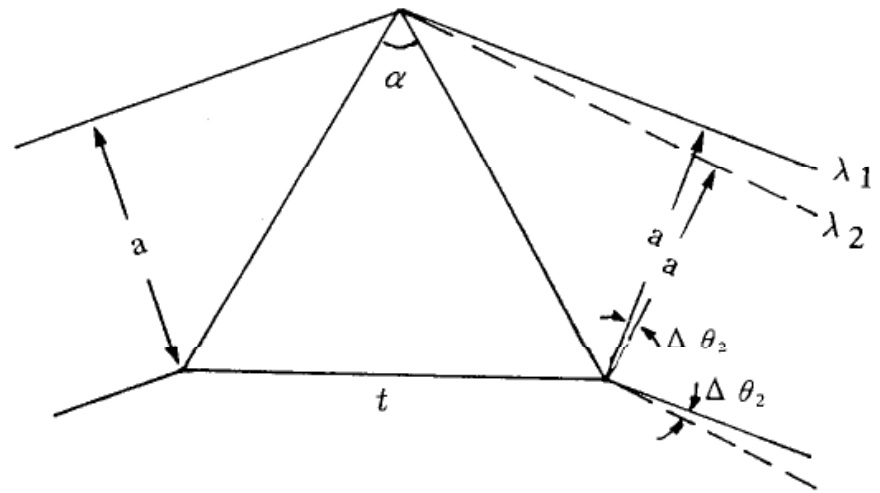
# 鑑別能力(Resolution)

$$R = \frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda} \quad (3.35)$$

其中， $\Delta\lambda$  為所能分辨的最小波長差， $\bar{\lambda}$  為平均波長。  
若一束具有波長差為  $\Delta\lambda$  的兩色複合光以產生最小偏向角的入射角度打在稜鏡面上，因稜鏡對不同波長造成的偏向角不同，因此出射光會有一角度差異  $\Delta\theta_2$  (參看圖 3-19)，此即為系統的最小分辨角，以  $\theta$  表之。



【圖 3-19】



【圖 3-19】

在光的物理繞射性質下，最小分辨角  $\theta$  與光波波長及光束寬度的關係為：

$$\theta = \frac{\bar{\lambda}}{a}$$

由此可得

$$R = a \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\lambda} = aD \quad (3.36)$$

將 (3.34) 式代入，可得

$$R = \frac{t}{n} \frac{dn'}{d\lambda} \quad (3.37)$$

通常都是將稜鏡置於空氣中，所以  $n = 1$ ，則

$$R = t \frac{dn'}{d\lambda} \quad (3.37')$$

(3.37') 式告訴我們，稜鏡的鑑別能力，除了和製作稜鏡的材料有關外，也和稜鏡的有效厚度成正比。

**【例 5】** 某玻璃在接近鈉光雙黃線 ( $\lambda_1 = 589 \text{ nm}$ ,  $\lambda_2 = 589.6 \text{ nm}$ ) 附近的色散率  $dn'/d\lambda$  為  $-361 \text{ cm}^{-1}$ , 利用這種玻璃作成稜鏡, 若要能鑑別這兩條鈉光雙黃線, 求稜鏡底邊的最小寬度為多少?

**解：** 要能分辨鈉光雙黃線的稜鏡鑑別能力  $R$  依 (3.35) 式可知

$$R = \frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda} = \frac{589.3 \text{ nm}}{0.6 \text{ nm}} = 982.17$$

再代入已知的色散率, 由 (3.37') 式可得最小的寬度為

$$t = 2.72 \text{ cm}$$

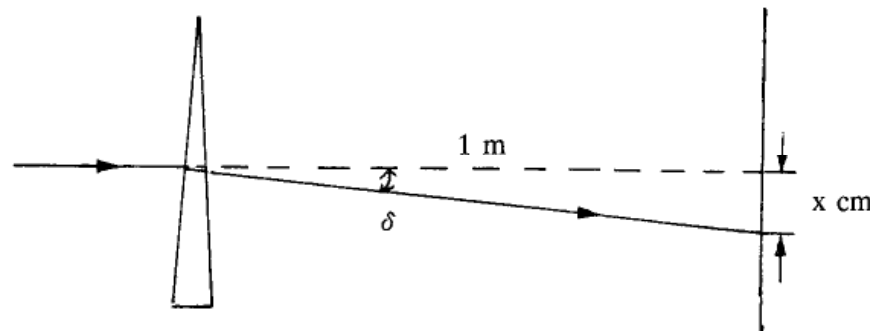
## 3-5 Wedge (Thin Prism)

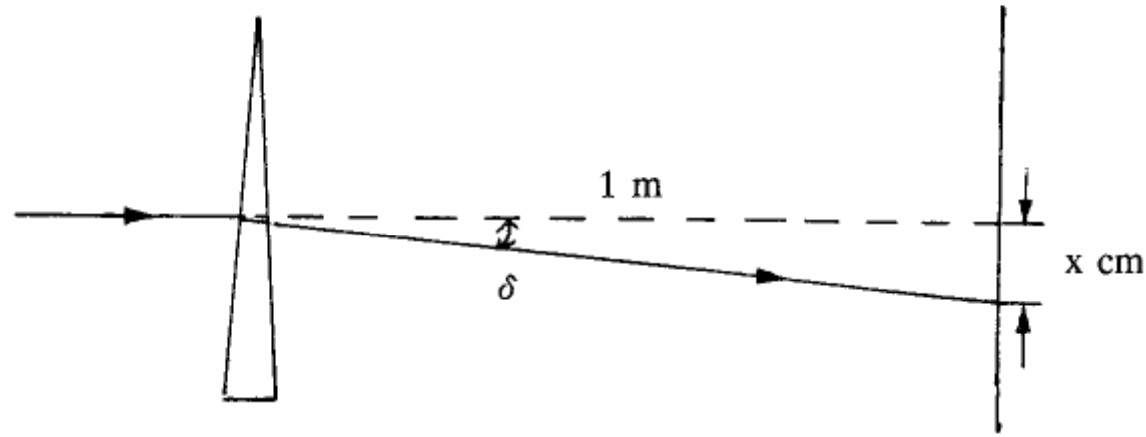
當稜鏡角  $\alpha$  非常的小，即當  $\sin \alpha \doteq \tan \alpha \doteq \alpha$  時，我們就可將此薄稜鏡 (thin prism) 看成是一個楔 (wedge)。對一個楔來說，它的偏向角計算可以變的非常簡單。由於楔的應用大多在於使光線通過楔後為最小偏向角的狀態，否則也是接近於最小偏向角的狀態，所以我們可以用最小偏向角的公式來計算由楔產生的偏向角。假設一折射率為  $n'$ ，稜鏡角為  $\alpha$  的楔，放置於  $n$  介質中，則其偏向角由 (3.20) 式可知

$$\frac{n'}{n} = \frac{\sin(\frac{\delta+\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\delta + \alpha}{\alpha}$$

故

$$\delta = \alpha \left( \frac{n'}{n} - 1 \right) \quad (3.38)$$





【圖 3-20】

楔的偏向角  $\delta$ ，通常也用來表示楔的折光能力 (power)。折光能力的單位習慣上採用 D (prism diopter) 來表示，所謂 1D 的折光能力，即是指楔能讓光線在 1 公尺遠的屏幕上發生 1 公分的位移量，如圖 3-20 所示的楔，它的折光能力即相當於 XD，表示讓光線經過楔後在 1 公尺遠的屏幕上有了 X 公分的位移。此外光線位移的方向也表示出了此楔的軸方向，亦即楔的稜邊指向底邊的方向。



**【例 6】** 若楔的材料為  $n = 1.6705$ ，如果要有 1D 的折光能力，則楔角  $\alpha$  需做成幾度？假設此楔置於空氣中。

**解：** 1D 的折光能力相當於偏向角為

$$\delta = \frac{1}{100} = 0.01 \text{ (rad)}$$

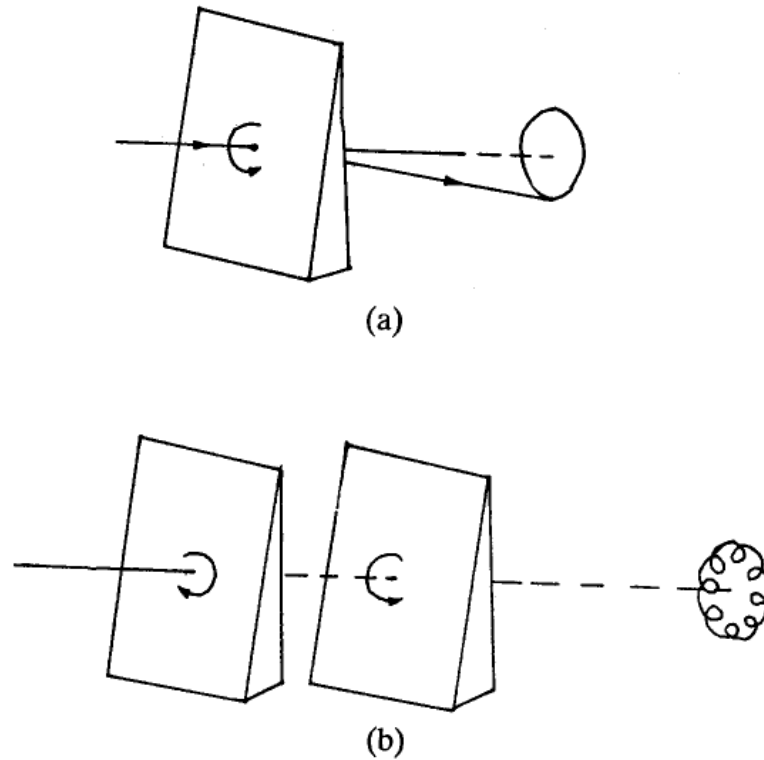
利用 (3.38) 式，可得

$$\alpha = \frac{\delta}{n - 1}$$

$$\alpha = 0.0149 \text{ (rad)} = 0.8545^\circ$$

利用楔的折光能力，可使光線掃描出美麗的圖案，如圖 3-21 所示。

3-21(a) 圖中，將楔轉動，利用視覺暫留的效果，可看到圓形圖案，圓的半徑正比於楔的折光能力。若利用二個楔的組合，再配合轉速的快慢，就會產生不同的效果，如圖 3-21(b)。



【圖 3-21】

下面我們介紹一種具有可變折光能力的稜鏡，稱爲 Risley (或 Herschel) 稜鏡。這種稜鏡是利用令楔 1 的折光能力爲  $\delta_1$ ，楔 2 的折光能力爲  $\delta_2$ ，而楔 1 與楔 2 的軸夾角爲  $\beta$ ，當  $\beta$  爲零度時，系統有最大的折光能力即  $\delta_1 + \delta_2$ ，而當  $\beta$  爲  $180^\circ$  時，系統的折光能力爲零。對任意  $\beta$  角度時，系統折光能力可利用三角形的餘弦定理得知

$$\delta = (\delta_1^2 + \delta_2^2 + 2\delta_1\delta_2 \cos \beta)^{1/2} \quad (3.39)$$

當  $\delta_1 = \delta_2$

$$\delta = 2\delta_1 \cos \frac{\beta}{2} \quad (3.40)$$

改變  $\beta$  值就可調整整個光楔組合的折光能力。

假設整個系統折光的方向，和單獨由楔 1 所造成折光方向的夾角為  $\gamma$  則  $\gamma$  值為

$$\tan \gamma = \frac{\delta_2 \sin \beta}{\delta_1 + \delta_2 \cos \beta} \quad (3.41)$$

當  $\delta_1 = \delta_2$

$$\tan \gamma = \tan \frac{\beta}{2}$$

即

$$\gamma = \frac{\beta}{2}$$

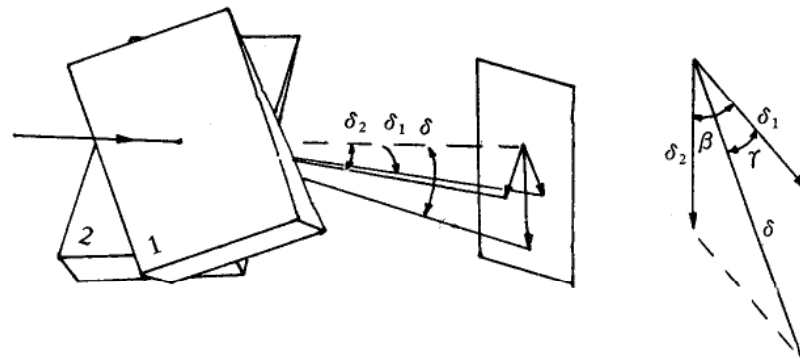
$$\delta = [\delta_1^2 + \delta_1^2 + 2\delta_1^2 \cos \beta]^{1/2}$$

$$= [2\delta_1^2(1 + \cos \beta)]^{1/2} = [2\delta_1^2(2 \cos^2 \frac{\beta}{2})]^{1/2} = 2\delta_1 \cos \frac{\beta}{2}$$

$$\cos^2(\frac{\beta}{2}) = \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1$$

$$\therefore 1 + \cos \beta = 2 \cos^2 \frac{\beta}{2}$$

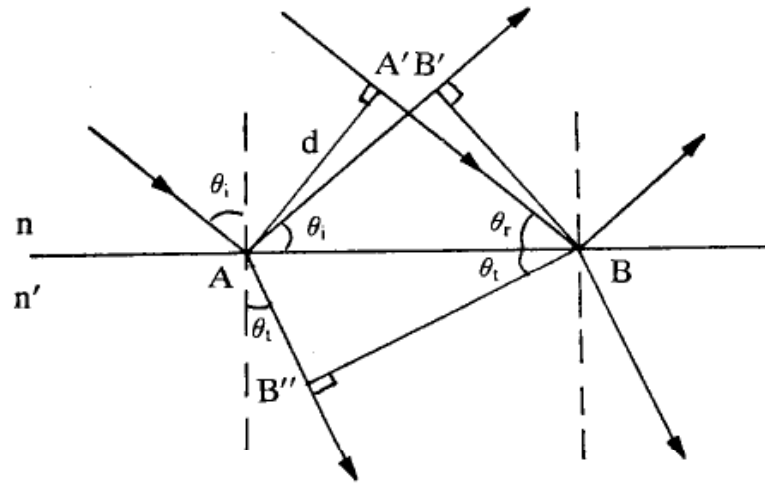
$$(3.42)$$



【圖 3-22】

## 3-7 光束經平面後的現象

前面討論了光線遇到光學平面的一些現象，現在讓我們再看看光束遇到光學平面後的反射與折射行為。針對一平行光束而言，當平行光束遇到一平面界面時，它的反射光束仍為平行光束，而且光束寬度維持不變，至於折射光束，也仍會是平行光束，但寬度卻會因內外反射的狀況不同而有所差異。



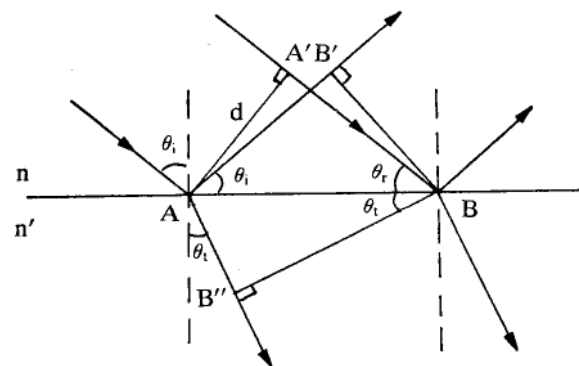
【圖 3-25】

在圖 3-25 中， $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{BB''}$  分別表示入射光束、反射光束與折射光束的寬度，因為

$$\overline{AA'} = \overline{AB} \cos \theta_i$$

$$\overline{BB'} = \overline{AB} \cos \theta_r$$

所以



【圖 3-25】

$$\overline{AA'} = \overline{BB'}$$

(3.43)

由 (3.43) 式知，反射光束的寬度不變，又因為

$$\overline{BB''} = \overline{AB} \cos \theta_t$$

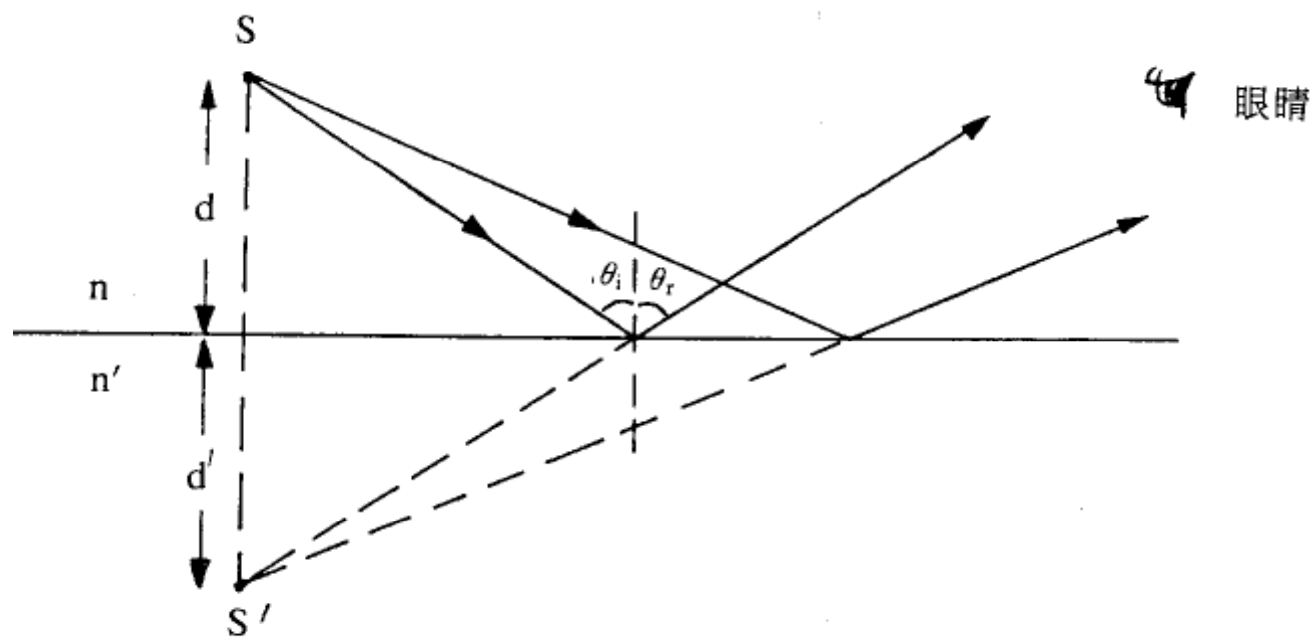
$$= \overline{AA'} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

亦即

$$\frac{\overline{BB''}}{\overline{AA'}} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}} \quad (3.44)$$

由 (3.44) 式可知，當外反射狀況時 ( $n < n'$ )，(3.44) 式大於 1，所以折射後的光束變的較寬，若為內反射的情形 ( $n > n'$ )，折射光束相對的變的比入射光線要窄些。

接下來我們再討論有關發散光束入射在平面上的反射與折射行為。在反射方面，由一物體  $S$  所發出的發散光束經平面的反射部份仍為發散光束，而且當觀測者觀測此反射部份的光線時，他會認為光線是由原光源的鏡像處  $S'$  所發射出來的，見圖 3-26。



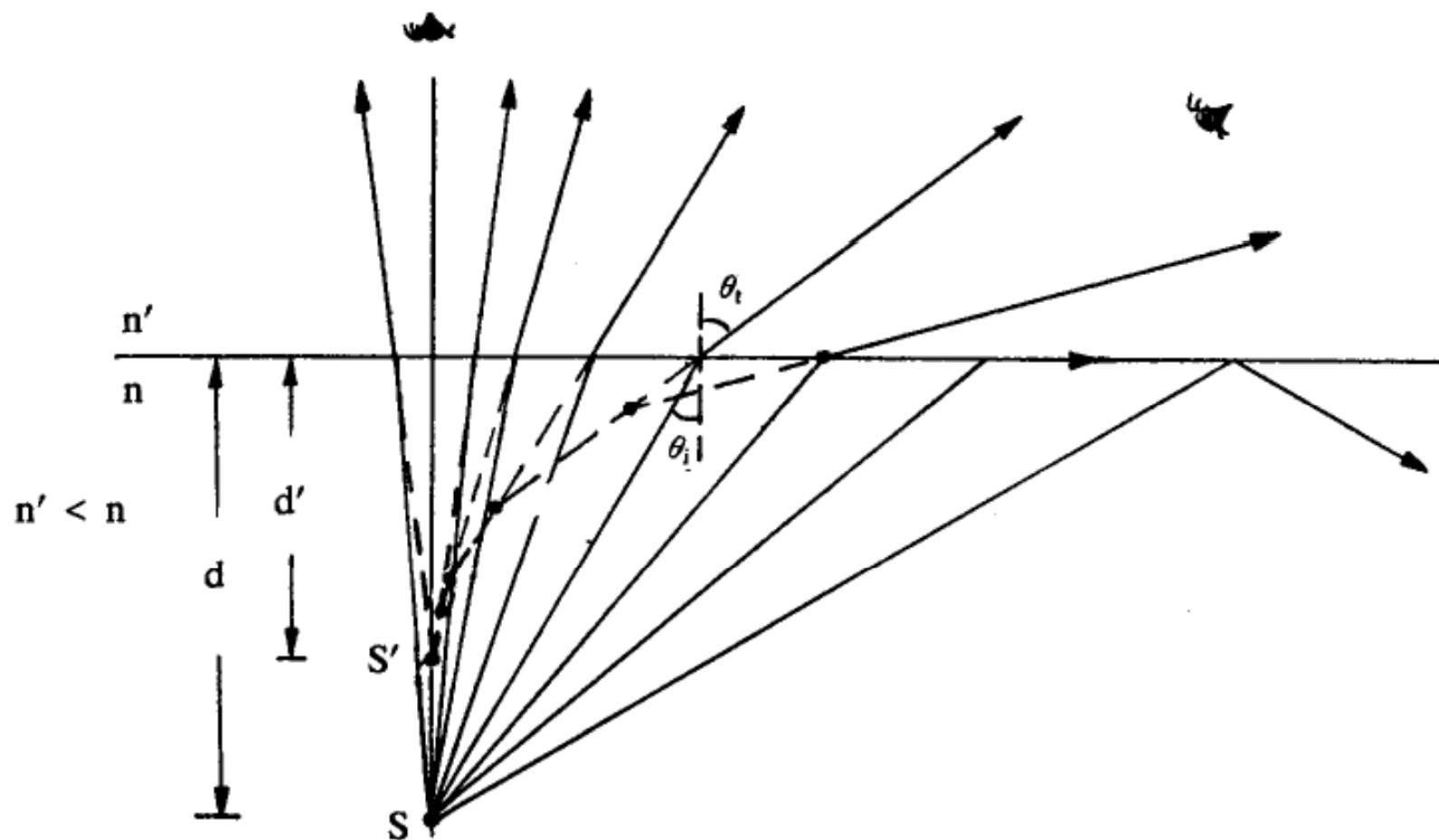
【圖 3-26】



在這裡鏡像  $S'$  即稱為光源  $S$  的虛像 (virtual image)。利用反射定律可證明，物至界面的垂直距離  $d$  等於像至界面的垂直距離  $d'$

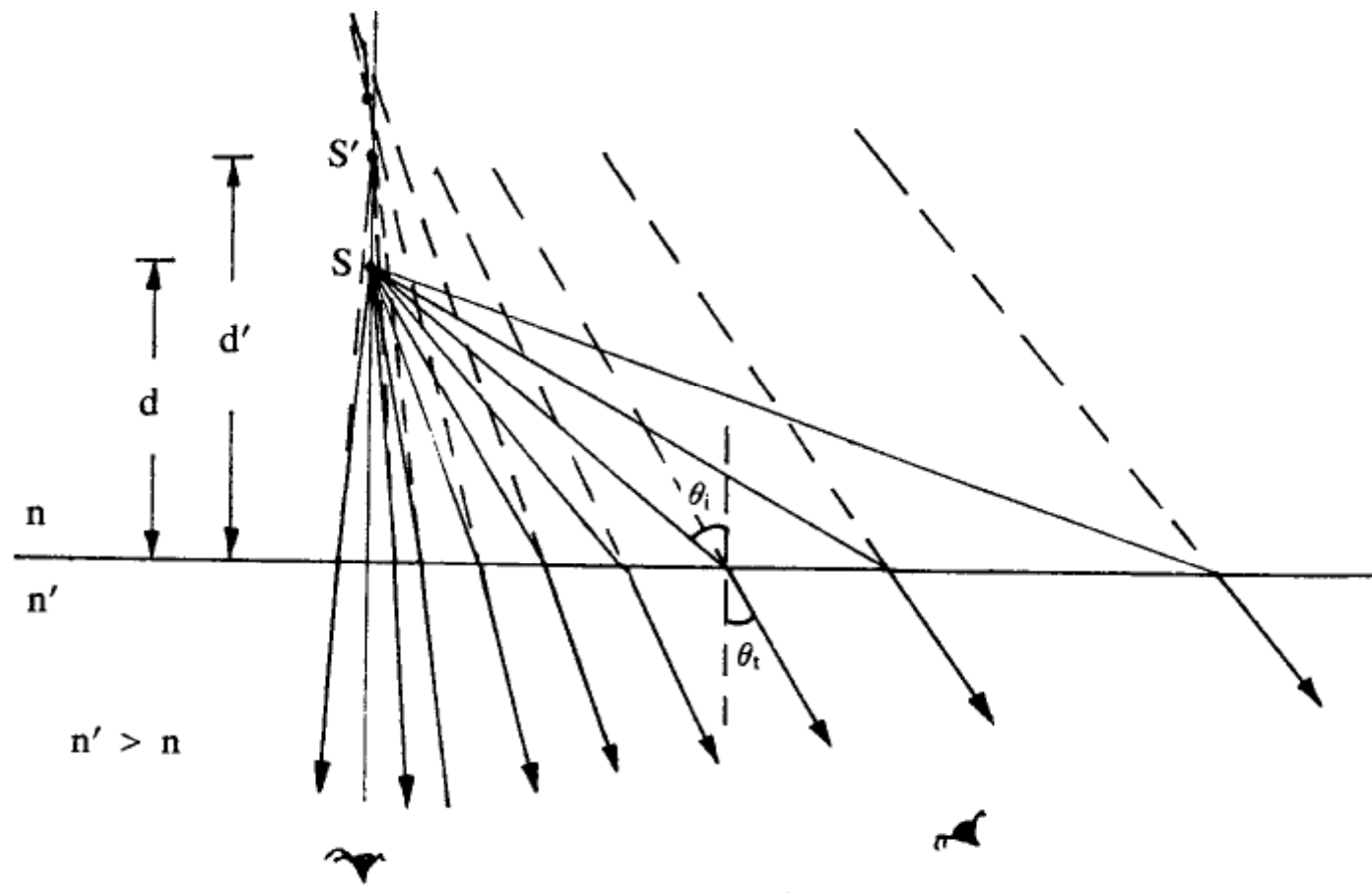
$$d = d' \tag{3.45}$$

發散光束的折射部份也會有成像的問題產生，同時會因為折射率的影響，而有發散角錐的變化。圖 3-27 顯示的是一內反射狀況下，發散光束的折射情形。



假設此內反射狀況的光密介質為水，光疏介質是空氣，那麼圖 3-27 相當於一物體 S 放置於水面下 d 的深度。由 S 所發出的光線經界面折射進空氣中，每一條光線都要滿足折射定律，故對任一方向的光束而言，其折射光束也是發散的。由於折射角  $\theta_t$  大於入射角  $\theta_i$ ，所以在 S 正上方的觀測者觀測到的發散角度必定較原光束的發散角度來的大，也因為如此，觀測者所看到的虛像 S' 的深度 d' 必定小於 d。對在其它方位的觀測者而言，隨著觀測位置的不同，他會看到在不同位置上的虛像（由所看到光線延伸線的交點構成），虛像的位置將會隨著觀測角度的增大而越靠近水面。圖 3-27 中由虛線所繪出的曲線，即為在不同位置上觀測時所看見成像的位置曲線。

在外反射狀況下，也會有類似的情形發生，見圖 3-28。

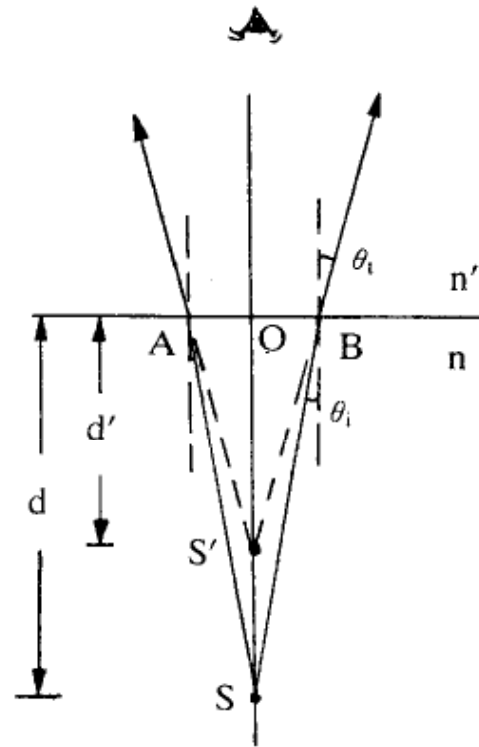


【 图 3-28 】

外反射狀況相當於水中的觀測者觀看岸上物體的情形。令

$S$  為空氣中的物體，在水面上  $d$  處，由  $S$  所發出之發散光束的折射光，經折射後仍為發散光束，且因為  $\theta_i > \theta_t$ ，所以正下方的觀測者所看到的虛像  $S'$ ，會在距水面更遠處，即  $d' > d$ 。隨著觀測方向角度的增大，所成虛像的位置也越遠離水面。無論是內反射或外反射狀況，其成像的位置變化，常常造成我們視覺上的判斷錯誤，實在是一個非常有趣的現象。

- 【例 7】空氣中的觀測者在水面上觀測置於正下方的水 ( $n_{\text{水}} = 1.33$ ) 中，深度為  $d$  的物體，求
- (a) 他所看到的物體距水面有多深？
- (b) 若在小角度觀測的條件下，觀測到的物體深度為何？



【圖 3-29】

(a) 由題意知  $n' = 1$  ,  $n = 1.33$

設觀測到物體的深度為  $d'$  , 亦即為  $S$  所成虛像的深度。

由圖 3-29 知

$$\overline{OB} = d' \tan \theta_t = d \tan \theta_i$$

所以

$$d' = d \frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_t} = d \frac{\sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin \theta_t \cos \theta_i} \quad (3.46)$$

利用 Snell 定律

$$n \sin \theta_i = n' \sin \theta_t$$

代入 (3.46) 式

利用 Snell 定律

$$n \sin \theta_i = n' \sin \theta_t$$

代入 (3.46) 式

$$d' = d \frac{n' \cos \theta_t}{n \cos \theta_i} = d \frac{\sqrt{(n')^2 - n^2 \sin^2 \theta_i}}{n \cos \theta_i} \quad (3.47)$$

由 (3.47) 式可知，觀測到的虛像深度，除了和折射率  $n$ 、 $n'$  有關外，並和物體  $S$  所發出的角度  $\theta_i$  有關

(b) 在小角度的條件下

$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1$$



那麼 (3.46) 式可改爲

$$\frac{d'}{d} = \frac{\theta_i}{\theta_t} \quad (3.48)$$

Snell 定律爲

$$\frac{n'}{n} = \frac{\theta_i}{\theta_t} \quad (3.49)$$

由 (3.48) 式，(3.49) 式，可得

$$\frac{d'}{d} = \frac{n'}{n} \quad (3.50)$$

故觀測到的像深爲  $0.75 d$